42　ベクトルと平面図形（1）

352

$\overrightarrow{OH} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$（$s,\ t$ は実数），OA の中点を M，OB の中点を N とすると，

外心は三角形の各辺の垂直二等分線の交点だから，$\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{OA} = 0$ かつ $\overrightarrow{NH}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$

これと，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{OA} &= \left(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OM}\right)\cdot\overrightarrow{OA} \\
&= \left\{\left(s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right\}\cdot\overrightarrow{OA} \\
&= \left\{\left(s - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}\right\}\cdot\overrightarrow{OA} \\
&= \left(s - \frac{1}{2}\right)\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + t\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} \\
&= 16s - 8 + t\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{NH}\cdot\overrightarrow{OB} &= \left(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{ON}\right)\cdot\overrightarrow{OB} \\
&= \left\{\left(s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right\}\cdot\overrightarrow{OB} \\
&= \left\{s\overrightarrow{OA} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OB}\right\}\cdot\overrightarrow{OB} \\
&= s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\left|\overrightarrow{OB}\right|^2 \\
&= s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + 25t - \frac{25}{2}
\end{aligned}$$

ここで，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ については，余弦定理より，

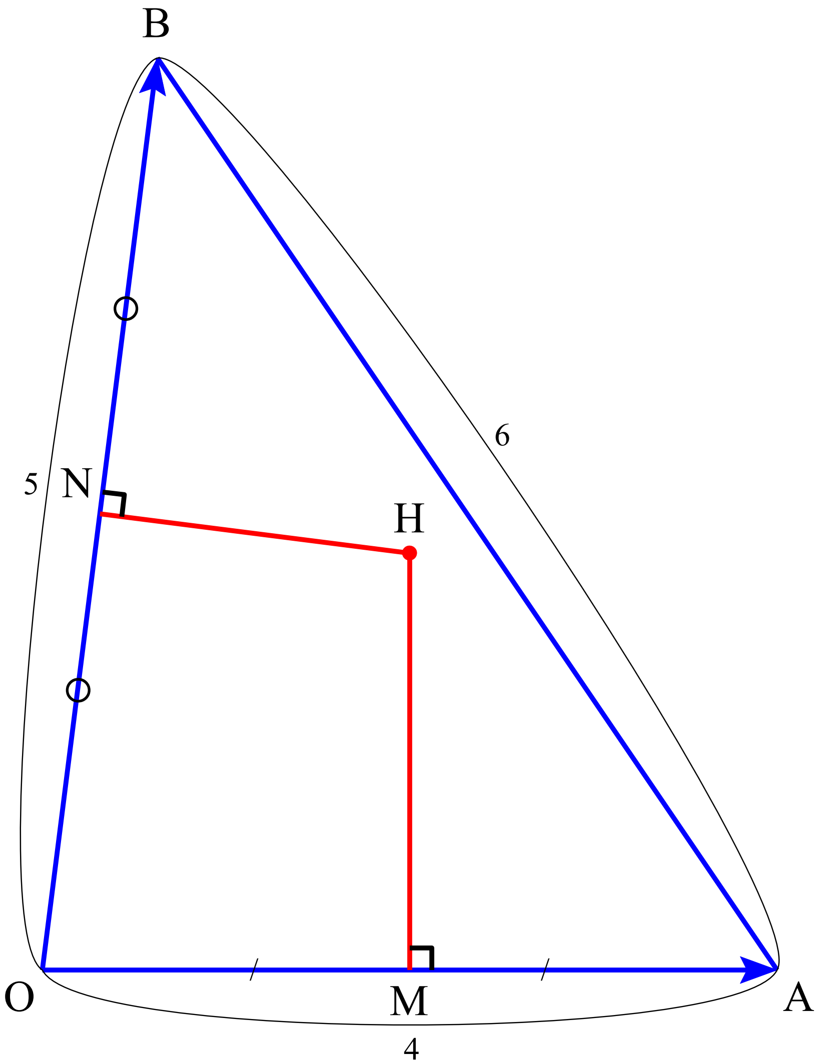
$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\angle AOB \\
&= \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}
\end{aligned}$$

$$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \frac{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AB}\right|^2}{2} = \frac{5}{2}$$

よって，$\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{OA} = 16s - 8 + \frac{5}{2}t$，$\overrightarrow{NH}\cdot\overrightarrow{OB} = \frac{5}{2}s + 25t - \frac{25}{2}$

よって，$16s - 8 + \frac{5}{2}t = 0$，$\frac{5}{2}s + 25t - \frac{25}{2} = 0$ より，$s = \frac{3}{7}$，$t = \frac{16}{35}$

ゆえに，$\overrightarrow{OH} = \frac{3}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{16}{35}\overrightarrow{OB}$


B
6
5
N
H
O
M
A
4

353

$\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OC}$ のなす角を θ $(0<\theta<180°)$ とすると，$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|}=\dfrac{1}{2}$ より，$\theta=60°$

よって，△OBC の面積＝$\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\sin 60°=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　・・・①

△OBC について，余弦定理より，$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=7$　$\therefore |\overrightarrow{BC}|=\sqrt{7}$

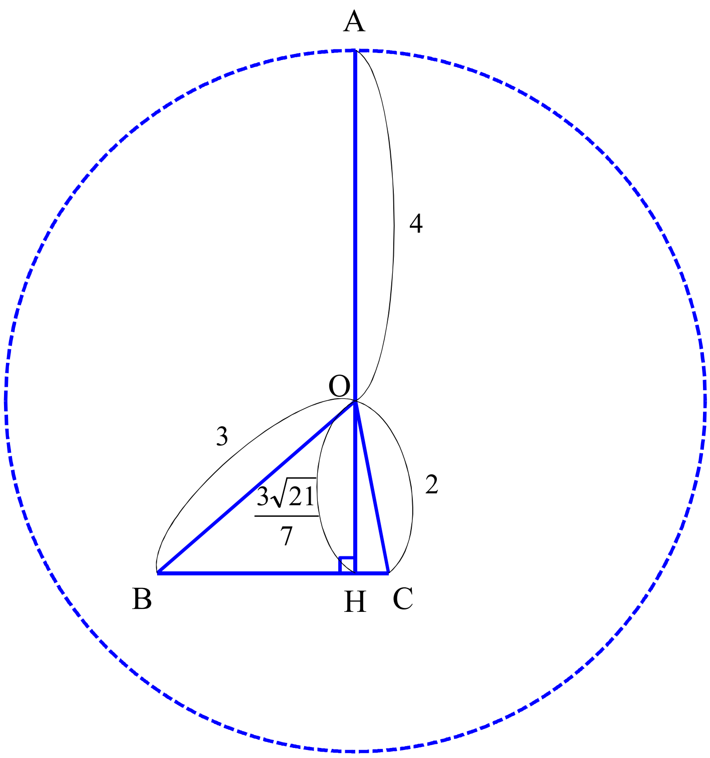
よって，O から直線 BC に下ろした垂線の足を H とすると，

△OBC の面積＝$\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{OH}|=\dfrac{\sqrt{7}}{2}|\overrightarrow{OH}|$　・・・②

よって，①＝②より，$|\overrightarrow{OH}|=\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$

したがって，点 O が線分 AH 上の点となるとき△ABC の面積は最大となり，
その値は

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AH}|&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|\left(|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OH}|\right)\\
&=\frac{\sqrt{7}}{2}\left(4+\frac{3\sqrt{21}}{7}\right)\\
&=2\sqrt{7}+\frac{3\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$



354

(1)

点 C が線分 DE を $t\ :\ 1-t$ に内分する点とすると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC}&=(1-t)\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{OE}\\&=(1-t)x\overrightarrow{OA}+ty\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

また，条件より，$\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

よって，$(1-t)x=\frac{2}{3}$，$ty=\frac{1}{3}$

これより，$\frac{2}{x}=3(1-t)$　・・・①　　$\frac{1}{y}=3t$　・・・②

ゆえに，①＋②より，$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=3$

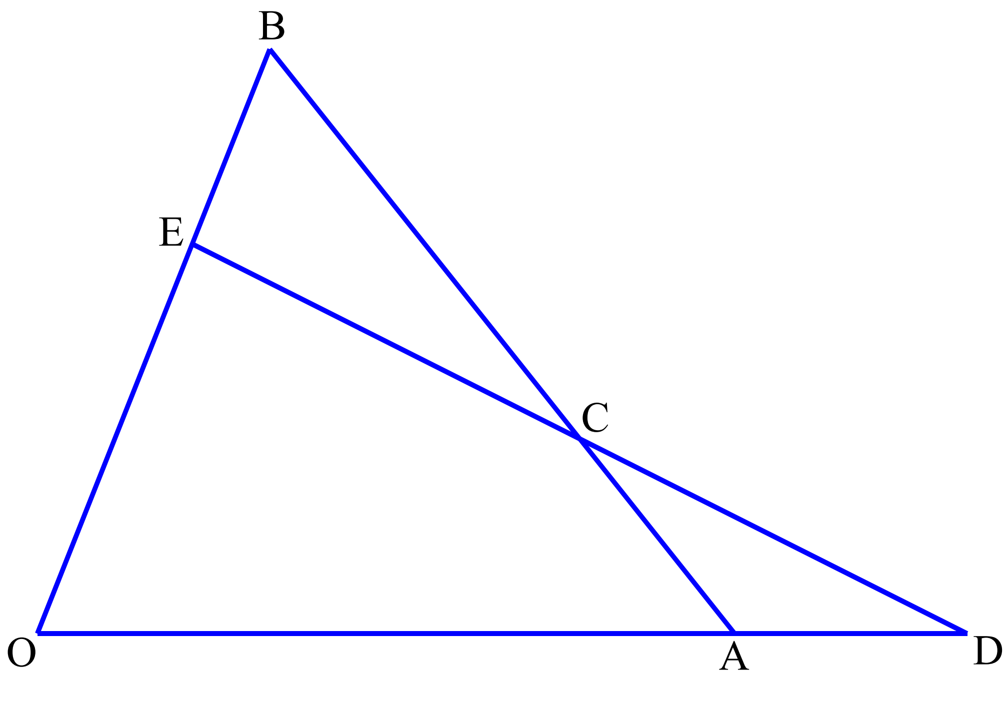
(2)

$\angle AOB=\theta$ とすると，

$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\sin\theta$，$T=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OD}\right|\left|\overrightarrow{OE}\right|\sin\theta=\frac{xy}{2}\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\sin\theta$ より，$\frac{S}{T}=\frac{1}{xy}$

(1)より，$\frac{1}{y}=3-\frac{2}{x}$ だから，$\frac{S}{T}=\frac{1}{x}\left(3-\frac{2}{x}\right)=-2\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$

これと，$0<\frac{1}{x}\leq 1$ より，$\frac{1}{x}=\frac{3}{4}$ すなわち $x=\frac{4}{3}$ で xy は最大値 $\frac{9}{8}$ をとる。



355

(1)

内心 I は三角形の各頂点の二等分線の交点だから，

∠AOB の二等分線と辺 AB の交点を C とすると，

I は線分 OC と∠OBA の二等分線との交点である。

また，三角形の辺と内角の二等分線の性質より，

C は辺 AB を OA : OB に内分する点であり，

I は線分 OC を OB : BC に内分する点である。

よって，

$$\overrightarrow{OC}=\frac{\left|\overrightarrow{OB}\right|\overrightarrow{OA}+\left|\overrightarrow{OA}\right|\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|+\left|\overrightarrow{OB}\right|}\quad\cdots①$$

$$\overrightarrow{OI}=\frac{\left|\overrightarrow{OB}\right|}{\left|\overrightarrow{OB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|}\overrightarrow{OC}=\frac{\left|\overrightarrow{OB}\right|}{\left|\overrightarrow{OB}\right|+\dfrac{\left|\overrightarrow{OB}\right|}{\left|\overrightarrow{OA}\right|+\left|\overrightarrow{OB}\right|}\left|\overrightarrow{AB}\right|}\overrightarrow{OC}=\frac{\left|\overrightarrow{OA}\right|+\left|\overrightarrow{OB}\right|}{\left|\overrightarrow{OA}\right|+\left|\overrightarrow{OB}\right|+\left|\overrightarrow{AB}\right|}\overrightarrow{OC}\quad\cdots②$$

①，②より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI}&=\frac{\left|\overrightarrow{OA}\right|+\left|\overrightarrow{OB}\right|}{\left|\overrightarrow{OA}\right|+\left|\overrightarrow{OB}\right|+\left|\overrightarrow{AB}\right|}\overrightarrow{OC}\\&=\frac{\left|\overrightarrow{OA}\right|+\left|\overrightarrow{OB}\right|}{\left|\overrightarrow{OA}\right|+\left|\overrightarrow{OB}\right|+\left|\overrightarrow{AB}\right|}\cdot\frac{\left|\overrightarrow{OB}\right|\overrightarrow{OA}+\left|\overrightarrow{OA}\right|\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|+\left|\overrightarrow{OB}\right|}\\&=\frac{\left|\overrightarrow{OB}\right|\overrightarrow{OA}+\left|\overrightarrow{OA}\right|\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|+\left|\overrightarrow{OB}\right|+\left|\overrightarrow{AB}\right|}\end{aligned}$$

(2)

①および条件より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC}&=\frac{\left|\overrightarrow{OB}\right|\overrightarrow{OA}+\left|\overrightarrow{OA}\right|\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|+\left|\overrightarrow{OB}\right|}\\&=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}+p}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{p^2+q^2}+p}\begin{pmatrix}p\\0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}p\\ \dfrac{pq}{\sqrt{p^2+q^2}+p}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，OC の傾き，すなわち∠AOB の二等分線の傾きは， $p \neq 0$ より， $\dfrac{q}{\sqrt{p^2+q^2}+p}$

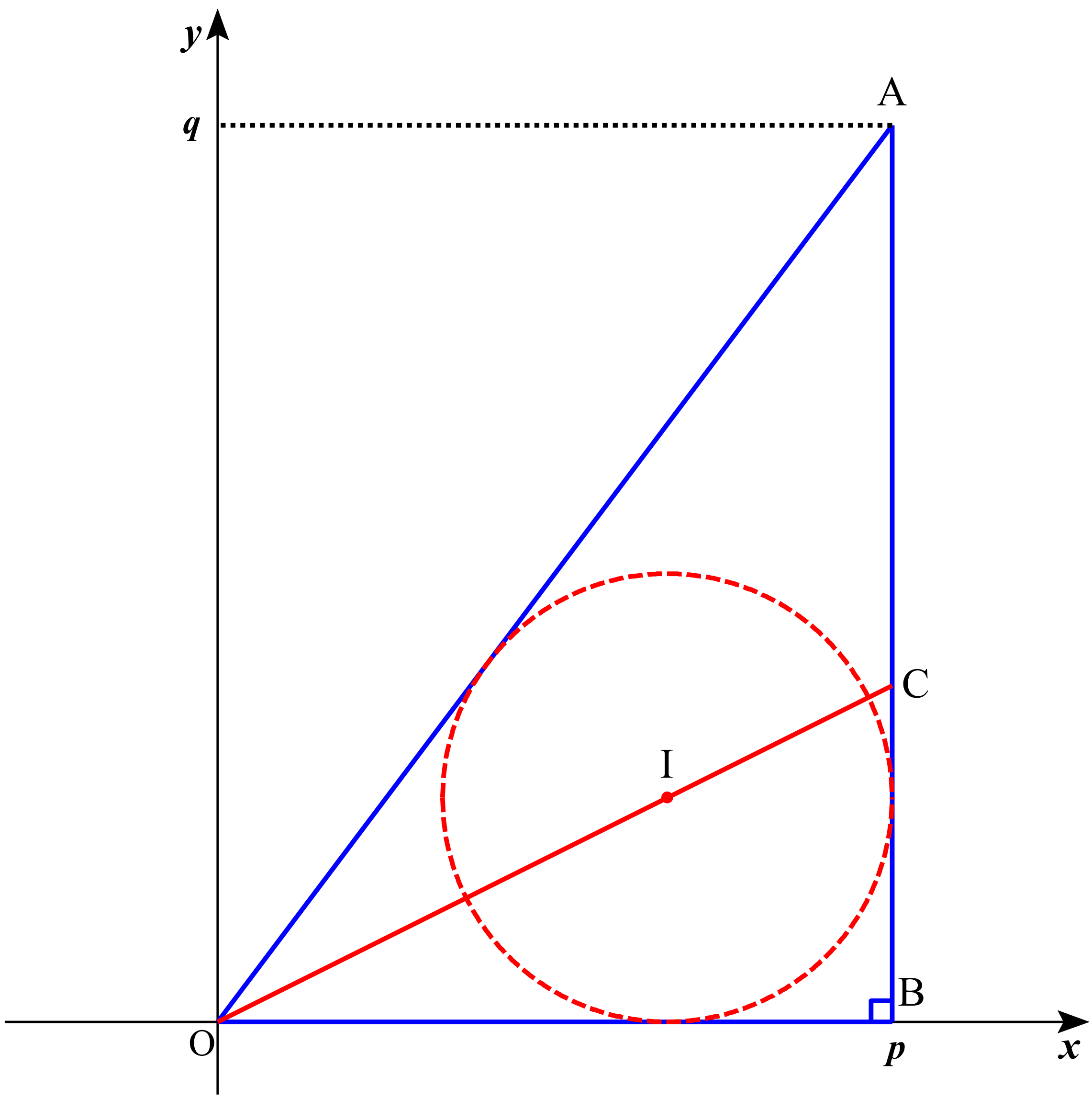
これが $\dfrac{1}{2}$ と等しいから， $\dfrac{q}{\sqrt{p^2+q^2}+p}=\dfrac{1}{2}$　・・・③

両辺に $2\left(\sqrt{p^2+q^2}+p\right)$ を掛けると， $2q=\sqrt{p^2+q^2}+p$ より， $2q-p=\sqrt{p^2+q^2}$

両辺を 2 乗すると， $4q^2-4pq+p^2=p^2+q^2$ より， $q(4p-3q)=0$

これと $q \neq 0$ より， $4p-3q=0$　すなわち $\dfrac{q}{p}=\dfrac{4}{3}$ となり，これは③を満たす。

よって， $\dfrac{q}{p}=\dfrac{4}{3}$



356

(1)

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right|^2=\left|\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}\right|^2$$

$$=\frac{|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2}{9}$$

$$=\frac{5r^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}}{9}$$

(2)

(1)と同様にして，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}\right|^2=\dfrac{5r^2+4\vec{b}\cdot\vec{c}}{9}$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC'}}\right|^2=\dfrac{5r^2+4\vec{c}\cdot\vec{a}}{9}$

また，条件より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC'}}\right|^2$

よって，$\dfrac{5r^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}}{9}=\dfrac{5r^2+4\vec{b}\cdot\vec{c}}{9}=\dfrac{5r^2+4\vec{c}\cdot\vec{a}}{9}$　すなわち　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$

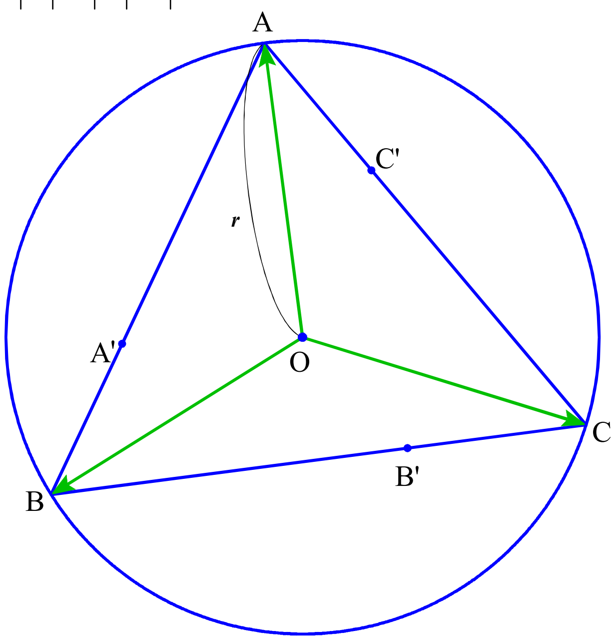
ここで，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=k$ とおくと，

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=2r^2-2k$

同様にして，$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2=2r^2-2k$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|^2=2r^2-2k$

よって，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|^2$

ゆえに，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|$ より，△ABC は正三角形である。



357

(1)

$(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より，$\left|(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$

これと，

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2=1$

$$\begin{aligned}\left|(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2&=\cos^2\theta\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+2(\sin\theta\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\sin^2\theta\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\\&=\cos^2\theta+\sin^2\theta+2(\sin\theta\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=1+2(\sin\theta\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

より，$(\sin\theta\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

また，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\sin\theta\neq0$，$\cos\theta\neq0$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(2)

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\left\{(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2=1$ より，

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|^2&=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2\\&=\left|(1+\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\\&=(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta\\&=2+2\cos\theta\\&=2+2\left(-1+2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\\&=4\cos^2\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|=2\cos\frac{\theta}{2}$$

$$
\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 \\
&= \left|(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1+\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 \\
&= \cos^2\theta+(1+\sin\theta)^2 \\
&= 2+2\sin\theta \\
&= 2+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \\
&= 2+2\left\{-1+2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right\} \\
&= 4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$\therefore \left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right| = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$

(3)

$\triangle$OAB は$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$，OA＝OB＝1 の直角二等辺三角形だから，$\mathrm{AB}=\sqrt{2}$

また，$\mathrm{AC}=\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|=2\cos\dfrac{\theta}{2}$，$\mathrm{BC}=\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|=2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\right)$

よって，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA} &= \sqrt{2}+2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+2\cos\frac{\theta}{2} \\
&= \sqrt{2}+2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+\cos\frac{\theta}{2}\right\} \\
&= \sqrt{2}+4\cos\frac{\pi}{8}\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}
$$

これと$-\dfrac{\pi}{8}<\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{8}$より，$\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{\theta}{2}=0$のとき，すなわち，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$のとき

$\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}$は最大値$\sqrt{2}+4\cos\dfrac{\pi}{8}$をとる。

ゆえに，$\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}$を最大にする$\theta$の値は$\dfrac{\pi}{4}$

358

(1)

解法 1

∠AOB の二等分線と辺 AB の交点を Q とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は，0 でない実数 k を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と表せる。

また，三角形の内角の二等分線の性質より，AQ：BQ＝OA：OB

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$$

$$=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\cdot\dfrac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$

$k\cdot\dfrac{|\vec{b}||\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$ は実数だから，$t=k\cdot\dfrac{|\vec{b}||\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$ とおくことにより，

点 P が∠AOB の二等分線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ となる実数 t が存在する。

解法 2

半直線 OA と OB 上に，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ となるように点 A' と点 B' をとると，

$\mathrm{OA'}=\mathrm{OB'}=1$ より，$\mathrm{OA'}:\mathrm{OB'}=1:1$

よって，∠A'OB' すなわち∠AOB の二等分線と A'B' の交点を Q とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{1+1}\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\frac{1}{1+1}\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

ゆえに，点 P が∠AOB の二等分線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ となる実数 t が存在する。

(2)

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ より，2 つのベクトルがなす角の二等分線は，それぞれの単位ベクトルの和の実数倍で表されることがわかる。

したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+v\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}\right)$$

となる実数 u と v が存在する。

また，△OAB について，余弦定理より，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}}=8$

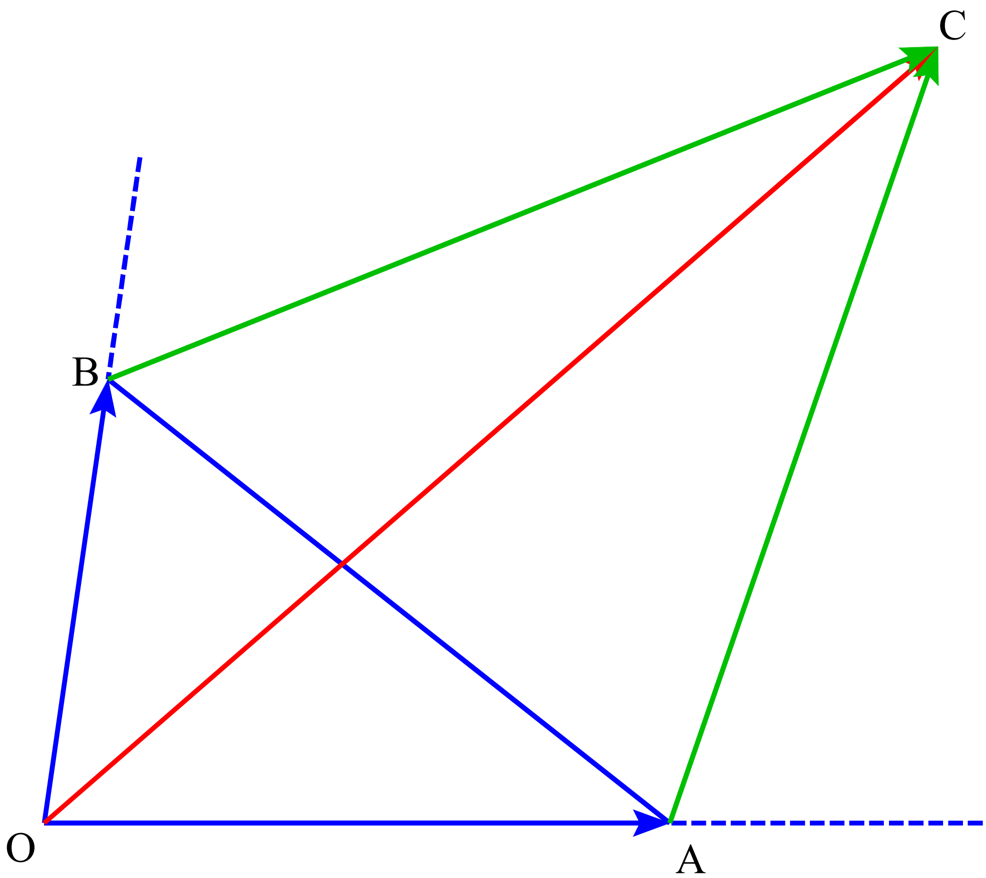
よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}\right)$$
$$=\vec{a}+u\left(\frac{\vec{a}}{7}+\frac{\vec{b}-\vec{a}}{8}\right)$$
$$=\left(1+\frac{u}{56}\right)\vec{a}+\frac{u}{8}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+v\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}\right)$$
$$=\vec{b}+v\left(\frac{\vec{b}}{5}+\frac{\vec{a}-\vec{b}}{8}\right)$$
$$=\frac{v}{8}\vec{a}+\left(1+\frac{3v}{40}\right)\vec{b}$$

これより，$1+\dfrac{u}{56}=\dfrac{v}{8}$ かつ $\dfrac{u}{8}=1+\dfrac{3v}{40}$　$\therefore u=14,\ \ v=10$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{5\vec{a}+7\vec{b}}{4}$


C
B
O
A